Trošku o metrice:

1. Rozhodněte, zda platí tvrzení (buď dokažte, že platí, nebo pomocí příkladu ukažte, že tvrzení neplatí):

   (i) sjednocení spočetně mnoha otevřených množin je otevřená množina;
   (ii) průnik spočetně mnoha otevřených množin je otevřená množina;
   (iii) sjednocení spočetně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina;
   (iv) průnik spočetně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.

2. Zkuste definovat : posloupnost je v metrickém prostoru (M,d) cauchyovská.

   Ukažte, že platí: Posloupnost $\{a_n\}, a_n \in R^n$ je konvergentní právě když je cauchyovská.

3. Ukažte, že platí: Z každé omezené posloupnosti $\{a_n\}, a_n \in R^n$ lze vybrat posloupnost konvergentní .

4. Množina $M \subset R^n$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená v R^n .

Funkce více proměnných:

1. <u>Definiční obory funkcí více proměnných:</u>
   Najděte definiční obory funkcí, u funkcí dvou proměnných se pokuste definiční obory načrtnout.
   Pokuste se také rozhodnout, zda nalezený definiční obor funkce je množina otevřená, resp.uzavřená, omezená, co je hranicí zkoumaného definičního oboru.

$$f(x,y)=x+\sqrt{y}\ ;\ f(x,y)=\sqrt{x+\sqrt{y}}\ ;\ f(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y}}\ ;\ f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}\ ;$$
$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\ ;\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}\ ;$$
$$f(x,y)=\ln(x+y)\ ;\ f(x,y)=\ln(xy)\ ;\ f(x,y)=\ln(xy-1);\ f(x,y)=\sqrt{\ln(xy)}\ ;$$
$$f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}\cdot\ln(xy)\ ;\ f(x,y)=\arcsin\frac{y}{x+1};$$
$$f(x,y,z)=\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}\ ;\ f(x,y,z)=\sqrt{\ln(x^2+y^2+z^2)}\ ;\ f(x,y,z)=\sqrt{z-x^2-y^2}\ ;$$
$$f(x,y,z)=\frac{1}{1-(x^2+y^2-z^2)}\ .$$

2. <u>Grafy funkcí dvou proměnných:</u>
   (pokuste se představit si „podobu“ grafu např. pomocí „vrstevnic“ a řezů třeba rovinou $x=0$)

$$f(x,y)=-2;\ ;\ f(x,y)=1-y;\ f(x,y)=2-x-y\ ;$$
$$f(x,y)=x^2+1;\ f(x,y)=4-y^2;\ f(x,y)=x^2+y^2\ ;\ f(x,y)=x^2+y^2+1\ ;\ f(x,y)=1-(x^2+y^2);$$
$$f(x,y)=x^2+4y^2;\ f(x,y)=y^2-x^2;$$
$$f(x,y)=\sqrt{9-(x^2+y^2)};\ f(x,y)=-\sqrt{4-(x^2+y^2)};\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\ ;$$
$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}\ ;\ f(x,y)=\exp(-x^2-y^2)\ .$$

3. Je dána funkce $f(x,y)=\log(y-x^2)$.
   Najděte a načrtněte její definiční obor, vyšetřete spojitost funkce f v definičním oboru .
   Zkuste si představit graf funkce f.

4. Rozhodněte, zda následující funkce jsou spojité v R^2:

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$; b) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$;

c) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$.

5. Lze následující funkce spojitě rozšířit na R^2?

a) $f(x,y)=(x+y)^2.\cos(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$; b) $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$; c) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2x}$;

d) $f(x,y)=\dfrac{\sin x+\sin y}{x+y}$.

6. „Mechanické" derivování:
Vypočítejte parciální derivace 1. a 2.řádu všude, kde existují, funkcí:

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; b) $f(x,y)=\log(x+\sqrt{x^2+y^2})$; c) $f(x,y,z)=e^{xyz}$ d) $f(x,y,z)=x^{\frac{y}{z}}$;

e) $f(x,y,z)=\arcsin(\dfrac{z^2}{x^2+y^2})$;

f) Ukažte, že funkce $f(x,y)=\log(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ je v $R^2-\{(0,0)\}$ řešením rovnice $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

(Laplaceova rovnice).

7. Diferenciál a jeho užití:

a) Ukažte, že funkce $f(x,y)=\log(y-x^2)$ je diferencovatelná v bodě $(1,2)$ a určete v tomto bodě diferenciál funkce f. Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v bodě $(1, 2, 0)$.
Užitím lineární aproximace spočítejte přibližně $\log(1{,}99-(1{,}02)^2)$.

b) Určete, kde následující funkce mají první i druhý diferenciál a tyto diferenciály napište:

i) $f(x,y)=\exp(x^2-y)$ (a spočítejte přibližně pomocí Taylorova polynomu 2.stupně $f(1{,}02;0{,}97)$);

ii) $f(x,y,z)=(\dfrac{x}{y})^{\frac{1}{z}}$.

c) Ukažte, že pro malá x,y platí $arctg\dfrac{x+y}{1+xy}\cong x+y$.

d) Ukažte, že funkce $f(x,y)=\sqrt{|x.y|}$ není diferencovatelná v bodě $(0,0)$.

8. Je dána funkce $$f(x,y)=4\sqrt{1-\frac{y}{x+1}} .$$

a) Najděte a načrtněte její definiční obor, vyšetřete spojitost funkce f v definičním oboru .

b) Vypočítejte $\nabla f(0,-3)$.

c) Ukažte, že funkce f je diferencovatelná v bodě $(0,-3)$ a určete v tomto bodě diferenciál funkce f.

d) Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v bodě $(0,-3,8)$.

e) Nabývá funkce f globálních extrémů ve svém definičním oboru nebo lokálních extrémů uvnitř ?